22/3/17

Απλή Στατιστική Διαστηματοεκτίμηση

Διαστηματοεκτίμηση για τη μέση τιμή (μ)

Παράδειγμα (4.2): 170, 175, 190, 198, 215, 185, 184, 207, 210, 193, 196, 180 τ.δ. από $N(\mu, \sigma^2$ άγνωστο$)$, $n=12$

Επίπεδο ασφάλειας $=200$, Υπάρχει λόγος ανησυχίας;

Γενικά: Έστω $x_1, x_2, \dots, x_n$ τ.δ. από Πληθ. (μ, σ^2). Ενδιαφέρει η παράμετρος μ.

Έστω $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

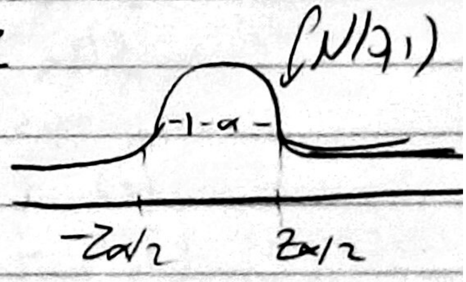
(i) Κανονικός Πληθυσμός, σ^2 γνωστό $N(\mu, \sigma^2$ γνωστό$)$

Καλύτερος εκτιμητής μ: $\hat{\mu} = \bar{x}$, $E(\bar{x}) = \mu$, $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$ ή $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

Επειδή, $\bar{x} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) \to \frac{\bar{x}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ κ' $(1-\alpha)\cdot 100\%$

ΔΕ για το μ: (L, U) $\to$ $L = \bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\to$ $U = \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$



Για να ελέγξουμε υποθέσεις της μορφής

(i) $H_0: \mu \leq \mu_0$ v $H_\alpha: \mu > \mu_0$ (μ_0 γνωστό)

(ii) $H_0: \mu \geq \mu_0$ v $H_\alpha: \mu < \mu_0$

(iii) $H_0: \mu = \mu_0$ v $H_\alpha: \mu \neq \mu_0$

με επίπεδο σημαντικότητας α (μέγεθος κρίσιμης περιοχής) και χρησιμοποιούμε το στατιστικό $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$ όταν αληθεύει η H_0 και κρ. περιοχές:

(i) $C = [z_\alpha, \infty)$ ή $Z \geq z_\alpha$

(ii) $C = (-\infty, -z_\alpha]$ ή $z \le z_\alpha$

(iii) $C = (-\infty, -z_{\alpha/2}] \cup [z_{\alpha/2}, \infty)$ ή $|z| \ge z_{\alpha/2}$

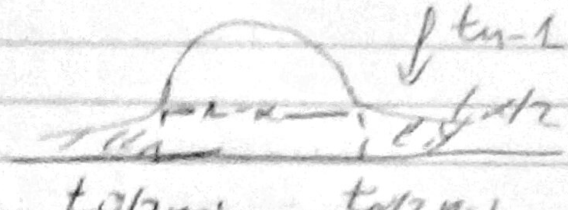
(ii) Κανονικός Πληθυσμός, σ^2 άγνωστο, $N(\mu, \sigma^2$ άγνωστο$)$

Εκτιμητής του μ: $\hat{\mu} = \bar{x}$, $\sigma^2_{\bar{x}} = \frac{\sigma^2}{n}$ κ' $\hat{\sigma}^2_{\bar{x}} = \frac{s^2}{n}$

ή $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$

Επειδή $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, ένα $(1-\alpha)\cdot 100\%$ ΔΕ για το μ

$$(L, U) \begin{cases} L = \bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \\ U = \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \end{cases}$$



Για να ελέγξουμε τις υποθέσεις (i), (ii), (iii) για τη μέση τιμή μ χρησιμοποιούμε το στατιστικό $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \sim t_{n-1}$, όταν H_0 αληθές και κρίσιμες περιοχές μεγέθους α (επίπεδο σημαντικότητας)

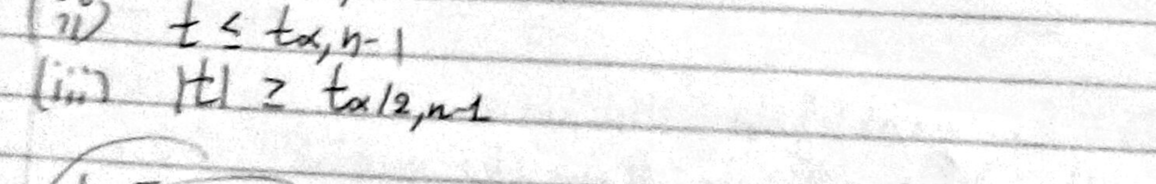
(i) $t \ge t_{\alpha, n-1}$

(ii) $t \le t_{\alpha, n-1}$

(iii) $|t| \ge t_{\alpha/2, n-1}$

t-Test

$H_0: \mu = \mu_0$ ν $H_1: \mu > \mu_0$



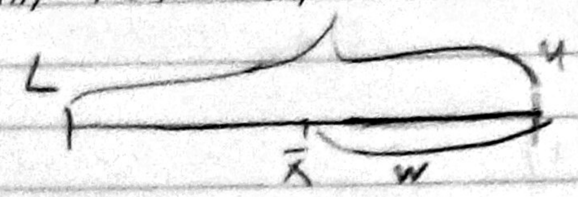
$\alpha = P(\text{απόρ. } H_0 \mid H_0 \text{ αληθής})$
$\beta = P(\text{δεχ. } H_0 \mid H_0 \text{ ψευδής})$

(iii) Μη κανονικός πληθυσμός, μεγάλο δείγμα ($n \geq 25$, ΚΟΘ)
$\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$, Είναι (ΚΟΘ), $\bar{x} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(\mu, \frac{\sigma^2}{n}) = N(\mu, \frac{s^2}{n})$

Επειδή, $\frac{\bar{x}-\mu}{s/\sqrt{n}} \underset{n \geq 25}{\overset{\text{προσ.}}{\sim}} N(0,1) \rightsquigarrow (1-\alpha)100\%$ Δ.Ε για το μ:

$L = \bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{s}{\sqrt{n}}$, $U = \bar{x} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$

Για να ελέγξουμε τις υποθέσεις (i), (ii), (iii) χρησιμοποιούμε το στατιστικό, $Z = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}} \overset{\text{προσ.}}{\sim} N(0,1)$ όταν H_0 αληθής και κρ. περιοχή μεγέθους α,
i) $Z \geq z_\alpha$
ii) $Z \leq -z_\alpha$
iii) $|Z| \geq z_{\alpha/2}$



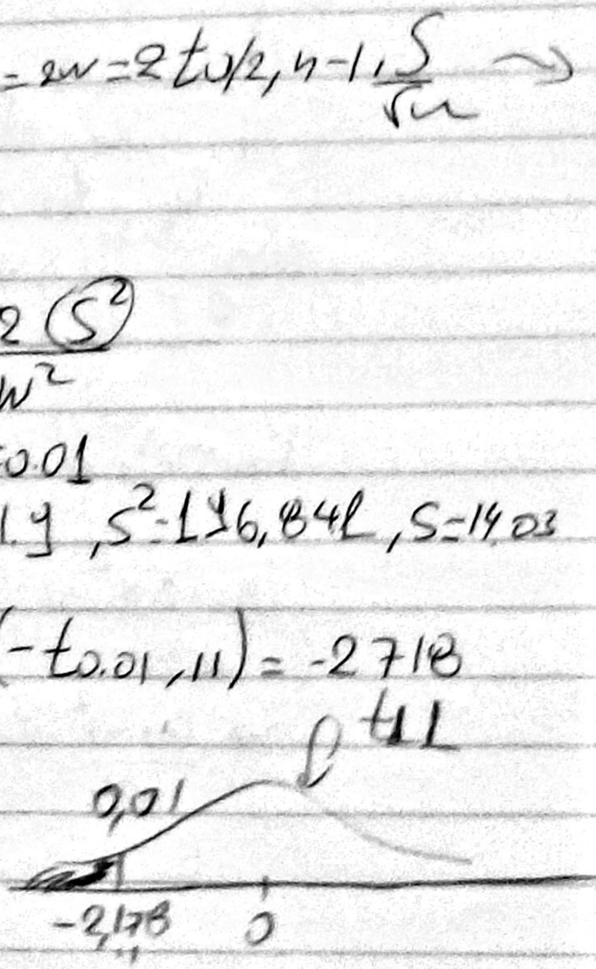
$U - L = 2w = 2 t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}} \rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow n = \frac{t^2_{\alpha/2, n-1} s^2}{w^2} \rightsquigarrow n = \frac{(t_{\alpha/2} s)^2}{w^2}$

(4.2) $H_0: \mu = 200$ vs $H_1: \mu < 200$, $\alpha = 0.01$
$\hat{\mu} = \bar{x}$, $\hat{\sigma}_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$ || $\bar{x} = 191.9$, $s^2 = 196.842$, $s = 14.03$

$t = \frac{\bar{x}-\mu_0}{s/\sqrt{n}}$ κρ. περιοχή $t \leq -t_{\alpha, n-1}$ $(-t_{0.01, 11}) = -2.718$

Άρα, $t = \frac{191.9 - 200}{14.03/\sqrt{12}} = -2.197$



Επειδή $t = -2.197 \nleq -2.718$ $(t_{0.01,11})$ δεν απορρίπτεται η H_0.

95% ΔΕ για το μ : $L = \bar{x} - t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$

$U = \bar{x} + t_{\alpha/2, n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$ $\Rightarrow (L, U) = (187{,}33 \ 220{,}61)$

$\alpha = 0{,}05$

$t_{\alpha/2, n-1} = t_{0{,}025} = 2{,}2...$

Παράδειγμα

$n = 25$ $D_i = M_{\mu\epsilon\tau}(Y_i) - \Pi_{\rho\iota\nu}(Y_i)$

$D_i \sim N(\mu, \sigma^2$ άγνωστη$)$

$H_0: \mu = 0$ ✓ $H_\alpha: \mu > 0$

$\bar{x} = 6$ $t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}}$

$S^2 = 64$

Κρ. περ. $t \geq t_{\alpha, n-1} = t_{0{,}05, 24} = 1{,}711$

Επειδή $3{,}75 > 1{,}711$ απορρίπτω την H_0.

Άσκηση 4.1

$X_1, \dots, X_{n_1} \sim N(\mu_x, \sigma^2)$

$Y_1, \dots, Y_{n_2} \sim N(\mu_y, \sigma^2)$

ΝΔΟ $U(X, Y) = w S_x^2 + (1-w) S_y^2$ $\forall$ $w \in [0,1]$ αμ. ε.τ. σ^2

$E[U(X,Y)] = w \cdot \underbrace{E(S_x^2)}_{\sigma^2} + (1-w) \underbrace{E(S_y^2)}_{\sigma^2} = \sigma^2$

$Var(U) = w^2 Var(S_x^2) + (1-w) Var(S_y^2)$

$\frac{(n_1-1) S_x^2}{\sigma^2} \sim X^2_{n_1 - 1} \Rightarrow Var\left(\frac{(n_1-1) S_x^2}{\sigma^2}\right) = 2(n_1 - 1)$

$\Rightarrow \frac{(n_1-1)^2}{\sigma^4} Var(S_x^2) = 2(n_1 - 1)$

$Var(S_x^2) = \frac{2\sigma^4}{n_1 - 1}$

$\rightsquigarrow Var(w) = w^2 \frac{2\sigma^4}{n_1-1} + (1-w)^2 \frac{2\sigma^4}{n_2-1}$

$\rightsquigarrow g(w) = 2\sigma^4 \left[\frac{w^2}{n_1-1} + \frac{(1-w)^2}{n_2-1} \right] = \frac{2\sigma^4}{(n_1-1)(n_2-1)} \left[(n_1+n_2-2)w^2 - 2(n_1-1)w + n_1-1 \right]$

για ποιο w η $g(w)$ min?

η $f(w) = (n_1+n_2-2)w^2 - 2(n_1-1)w + n_1 - 1$

κ' $f'(w) = 2w(n_1+n_2-2) - 2(n_1-1) = 0 \rightsquigarrow w = \frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$

η $f''(w) = 2(n_1+n_2-2) > 0$ άρα min

Δηλαδή $w = \frac{n_1-1}{n_1+n_2-2}$ κ' $1-w = 1 - \frac{n_1-1}{n_1+n_2-2} = \frac{\cancel{n_1}+n_2-2-\cancel{n_1}+1}{n_1+n_2-2} = \frac{n_2-1}{n_1+n_2-2}$

Κα) Εχω το $\sigma^2_{\beta\varepsilon\lambda\tau} = \frac{(n_1-1)S_X^2 + (n_2-1)S_Y^2}{n_1+n_2-2}$